

Niels Jacob Hansen, Mikael Skånstrøm og Kirsten Søs Spahn

001110
0100010110011
1101011001011001
11011000110011010110
0100111010100010110011001



Matematik med it

Lærervejledning 1

01110100111010
1010110010110
0101010011101
01011001110
0110111010
0001011
0010



1001
0110011001110
111001100111010
011001100111010
011001100111010
011001100111010
011001100111010
011001100111010
011001100111010
011001100111010

Matematik med it

1

Lærervejledning



Forlaget Matematik

Niels Jacob Hansen, Mikael Skånstrøm,
Kirsten Søs Spahn

Indhold

Side 3	Forord
Side 4	Indledning
Side 8	Kæledyr
Side 9	En tur i biografen
Side 10	At gå op i
Side 11	Hvis svaret er...
Side 12	En spørgeskemaundersøgelse
Side 13	Væddemålet
Side 14	Talfølger og figurfølger
Side 15	Rumfang
Side 16	Talstreng i taltavlen
Side 17	Ligninger
Side 18	Statistik
Side 19	Overfladen af en hund
Side 20	Regneruter
Side 21	Sammenhænge
Side 22	Verdens største primtal og andre store tal
Side 23	Matematiske udfordringer
Side 24	Kolofon

Bogen udgives med støtte fra

A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond
til almene Formaal

Forord



Foto: Kathrine Iversen

Matematik med it er en videreførelse af et tidligere projekt med samme navn. Projektets formål er efteruddannelse af matematiklærerne i grundskolen.

I forbindelse med det første projekt udgav Danmarks Matematiklærerforening grundbogen *Matematik med it*¹, som i otte artikler beskriver forskellige aspekter ved brug af it i matematikundervisningen.

Til anden del af projektet, som Gladsaxe Kommune står for med støtte fra A. P. Møller

og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond til almene Formaal, hører *Matematik med it · Elevbog 1* og *Matematik med it · Elevbog 2* med tilhørende lærervejledninger, som er udviklet af Danmarks Matematiklærerforening. Denne del af projektet viderefører efteruddannelsen gennem to elevbøger, der indeholder eksemplariske undervisningsforløb med brug af it-værktøjer og de to lærervejledninger, der indeholder didaktiske og metodiske overvejelser. Bøgerne dækker mellemtrin og ældste trin i grundskolen.

Indledning

Matematik med it · Elevbog 1 henvender sig til elever på mellemtrinnet, men vil også kunne bruges på ældste trin. Bogen indeholder 16 opslag, hvor der er fokus på brug af it med særligt fokus på arbejdet med CAS. Oplæggene er konstrueret så de kan anvendes uafhængigt af, hvilket CAS-værktøj eleverne har til rådighed.

De digitale værktøjer bruger eleverne i deres undersøgende arbejde med matematik. Arbejdet tager ofte udgangspunkt i problemstillinger fra det omgivende samfund, der kan være interessante for eleverne at undersøge. Eleverne skal arbejde ud fra en problem-løsende tilgang, hvilket betyder, at de opfordres til at afsøge flere mulige veje i processen. De vil så opdage, at der kan være flere løsninger til samme problemstilling. Oplæggene lægger op til, at eleverne bruger et CAS-værktøj i arbejdet med at opstille og undersøge matematiske modeller. Modellerne kan indeholde variable, som eleverne kan ændre. Dermed kan de ændre på modellernes forudsætninger og dermed også resultaterne.

CAS i matematikundervisningen

CAS er en forkortelse af Computer Algebra System. Et CAS-værktøj kan bruges til at arbejde med opgaver, der indeholder variable, at løse ligninger, at håndtere tal med mange betydende cifre og at håndtere store datasæt. CAS-værktøjet kan desuden præsentere resultater i grafer, diagrammer og tabeller. Det betyder, at en del af de opgaver, som eleverne arbejder med, kan løses af programmet, hvis eleverne taster de korrekte oplysninger ind. CAS-værktøjet er i denne sammenhæng en form for avanceret lommeregner. Det er imidlertid CAS-værktøjet

- som hjælp for eleverne til at udforske strategi og metoder
 - som hjælp til præsentation af resultater
 - og i det hele taget som hjælp til at blive klogere på matematik
- der er i fokus.

Det er derfor vigtigt at overveje, hvordan temaerne iscenesættes i undervisningen og hvordan CAS-værk-

tøjet bliver integreret. Nogle af de didaktiske spørgsmål, der bør overvejes i forhold til implementering af CAS-værktøjer er:

- Hvilket indhold skal der være i matematikundervisningen?
- Hvilke typer af opgaver kan være med til at udvikle elevernes matematiske kompetencer, når de arbejder med et CAS-værktøj?
- Hvilke udfordringer kan der opstå, når et CAS-værktøj inddrages i matematikundervisningen?
- Hvordan kan CAS blive et matematisk værktøj, som eleverne kan anvende på en kompetent måde?
- Hvilke evalueringsformer kan vise, hvilken læring og hvilke kompetencer eleverne har opnået?

Indholdet i en undersøgende og dialogisk matematikundervisning vil være præget af at opstille hypoteser, gennemføre undersøgelser og eksperimenter frem for løsning af flere opgaver af samme type. Der vil sandsynligvis forekomme situationer, hvor nogle elever oplever, at de er udfordret i forhold til valg af regnemetode, men her er det vigtigt at stille spørgsmål til eleverne, der kan lede dem frem til en strategi frem for at give dem en metode, som de ukritisk anvender.

Eleverne bør opleve, at matematik er fag, hvor det er positivt at vælge metoder kreativt, også selvom nogle af metoderne senere må opgives. Det er en del af læreprocessen.

Der skal være tid til fordybelse, når eleverne arbejder med problemløsning/modellering, fordi disse processer fordrer undersøgelser, afprøvninger og valg, som i sidste ende skal munde ud i forklaringer, argumenter og evt. ræsonnementer på baggrund af beregninger med et CAS-værktøj.

De udfordringer, der kan opstå i undervisningen, når et CAS-værktøj inddrages, kan være af såvel teknisk som didaktisk karakter. Symbolbehandling har en afgørende rolle i arbejdet med opgaverne i CAS. Det er muligt at bruge meningsfulde variabelnavne, som fx "pris" og "antal" i et CAS-værktøj. Denne måde at bruge variable på gør, at det er muligt at se variabelnavne



Foto: Kathrine Iversen

i regneudtryk eller matematiske modeller. Mange af udfordringerne kan også løses ved at bruge et regneark, hvor de variable er cellehenvisninger, og hvor regneudtryk og matematiske modeller er skjulte. Vær opmærksom på, at muligheden for meningsfulde variabelnavne stiller krav til stavemåde, da CAS-værktøjer ikke kan genkende variable, hvis de ikke er skrevet og stavet ens i hele dokumentet. Nogle CAS-værktøjer foreslår dog det korrekte variabelnavn, når blot et eller to bogstaver i et variabelnavn, der tidligere er brugt, indtastes korrekt.

For at CAS kan blive et matematisk værktøj, som eleverne kan anvende på en kompetent måde, er der nogle aspekter, der skal overvejes og tages stilling til:

- Hvordan arbejder vi med at oversætte matematisk syntaks til CAS syntaks?
- Hvilke udfordringer giver syntaksen i CAS-værktøjet?
- Er der repræsentationer, der skal ændres?
- Hvordan fortolker vi resultatet?
- Hvilke holdninger er der til brugen af CAS?
- Hvordan kan vi bruge CAS så kvaliteten af matematikundervisningen øges?

Bogens opbygning

Bogen er opbygget, så hvert emne/tema fylder et opslag. Der er generelt valgt en struktur, så venstre side er tænkt som en del af introduktionen til elevernes undersøgelser på højre side.

Venstresiden lægger op til en fælles introduktion og iscenesættelse af emnet. Eleverne får på den måde kendskab til indholdet, ligesom deres forståelse af både faglige og før-faglige begreber og brug af digitale værktøjer bliver afklaret. Hvis eleverne er i tvivl om centrale begreber, kan det være vanskeligt at opnå en forståelse, der gør, at de er i stand til at arbejde med problemerne. Udover at forstå begreberne, er det vigtigt, at eleverne bruger disse i sammenhæng med en kontekst, så deres matematiske kommunikationskompetence også udvikles. I side til side vejledningerne er der ideer til introduktionen.

Højresiden indeholder opgaver og udfordringer, der tager udgangspunkt i introduktionen på venstresiden. På højre side kommer begreber og brugen af digitale værktøjer i spil i forbindelse med arbejdet med problemstilling og opgaver. Dette bliver uddybet senere i side til side vejledningerne.

Det er muligt at læse mere om procesorienteret matematikundervisning i bogen *Matematik med it* (2016), kapitel 1². Her beskriver Karsten Enggaard, hvordan undervisningen kan organiseres, så processen og dermed udviklingen af matematiske kompetencer er central.

Opslagene i bøgerne har som ovenfor omtalt fokus på, at eleverne skal arbejde med problemløsning og modellering. I arbejdet med problemstillingerne skal eleverne sideløbende arbejde med at lære at anvende CAS som undersøgelsesværktøj. Det er vigtigt, at elevernes arbejde i løsningsprocessen kan tage udgangspunkt i forskellige strategier, og at de løbende kan diskutere og argumentere for deres valg af strategi. På denne måde vil eleverne opleve, at de ikke nødvendigvis kommer frem til samme løsning, selvom de har arbejdet med den samme problemstilling eller opgave. Det vil automatisk ske, når de skal foretage nogle valg i forhold til opgavens problemstilling, eller hvis de bliver spurgt "hvad nu hvis...?". det kan ses tydeligt i opslaget *Kæledyr*.

Evaluering

Evaluering af arbejdsprocessen er en udfordring, når eleverne har mange forskellige strategier og

løsningsforslag. I evalueringen kan man bruge digitale værktøjer som skærmoptager, audio, video eller fotos suppleret med opsamling af pointer undervejs i undervisningen.

Hvordan kan det give mening at evaluere fx dele af opgave 3 i opslaget *Kæledyr*? Umiddelbart handler det ikke om, at eleverne afleverer fem eller flere forslag til, hvad der sker med den samlede udgift, hvis de seks parametre ændrer sig. En skærmoptagelse med forklaringer fra eleven, der tydeligt viser, at hun har ændret i den model, hun har udarbejdet i sit CAS-værktøj vil være en evaluering, der kan give læreren indsigt i elevens kompetencer i denne sammenhæng. Ved at arbejde med skærmoptagelser tilgodeser læreren også mindst en af de fire elevpositioner, som er beskrevet i det tværgående tema 'It og medier' (Fælles Mål 2014). Det er muligt at læse mere om dette i *Matematik med it* kapitel 3³, hvor Rikke Teglskov beskriver arbejdet med de fire elevpositioner.

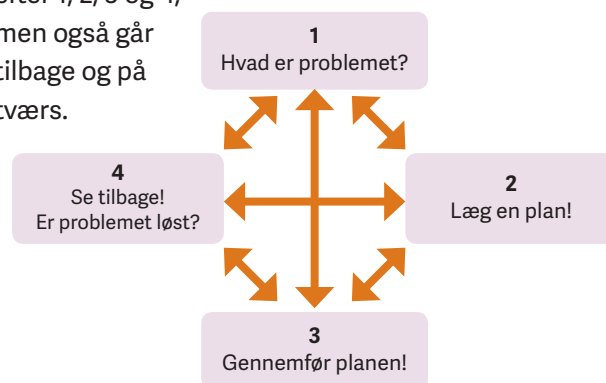
Under elevernes arbejde med et opslag, kan det være frugtbart i fællesskab at opsamle særlige pointer. Det kan være matematiske pointer, pointer fra brug af CAS eller et andet digitalt værktøj eller pointer vedrørende strategier/løsningsforslag. Rammen med overvejelser, der ligger efter opgaverne i alle opslag, er skrevet med henblik på elevrefleksioner. Det er lettest at reflektere over valg af strategi, værktøj og løsning, i umiddelbar forlængelse af arbejdet med opgaverne, mens problemer og pointer er i frisk erindring.

Problemløsning

Nedenstående model giver en oversigt over faser i arbejdet med problemløsning. Modellen kan i en eller anden form præsenteres for eleverne for at støtte dem i processen med problemløsning.

Spørgsmålene/udsagnene til hver fase kan anvendes som stilladsering. Pilene viser, at det både er en mulighed og ofte en nødvendighed, at eleverne ikke udelukkende arbejder fremad

efter 1, 2, 3 og 4, men også går tilbage og på tværs.



I **fase 1** arbejder eleverne med at forstå problemet.

1. Hvad bliver du bedt om at finde eller vise?
2. Kan du formulere problemet med dine egne ord?
3. Kan du forestille dig et billede eller et diagram, der kan hjælpe dig til at forstå problemet?
4. Er der information nok til at gøre det muligt for dig at finde en løsning?
Hvis ja, hvad er så den vigtigste information, du har fået?

I **fase 2** forsøger eleverne at lægge en plan.

1. Har du mødt problemet i en enklere form?
2. Gæt og prøv efter – måske kan du forbedre noget
3. Tegn et diagram/skitse el.lign.
4. Kig efter en mønster
5. Tegn en tabel
6. Kan problemet forenkles?
7. Opstil en ligning
8. Trevl op bagfra
9. Udeluk muligheder

I **fase 3** arbejder eleverne med planen.

1. Holde øje med sine fremskridt, så alt går efter planen
2. Tjekke hvert trin
3. Huske fejltrin eller særlige overvejelser ift. fremtidig gennemgang
4. Prøve en ny plan, hvis denne ikke lykkes

I **fase 4** ser eleverne tilbage og reflekterer.

1. Er der en metode, du kan bruge, som tillader dig at verificere dit svar?
2. Giver dit svar mening?
3. Kan du sætte dit svar ind i spørgsmålets kontekst?
4. Reflekter og se tilbage på din proces – hvad virkede? Hvad virkede ikke?

It og medier

Som tværgående tema skal it og medier være integreret i alle fag. I matematik kan eleverne arbejde med temaet, når de indsamler og deler information i forhold til de problemer, de skal løse. Det indhold, eleverne skaber i arbejdsprocessen, kan deles med en eller flere kammerater, og kan derved danne grundlag for et læringsfællesskab. De forskellige aspekter ved elevernes arbejde med it og medier i matematik er formuleret i fire punkter, som i forhold til oplægget *Kæledyr* kan udbygges som vist i det følgende.

1. Eleven som kritisk undersøger.
 - Viden om udgifter til kæledyr
 - Regneudtryk
 - Variable
 - Regne/bruge CAS
2. Eleven som analyserende modtager.
 - Beskriver forskellige situationer
 - Diskuterer variable og regnemodeller
3. Eleven som målrettet og kreativ producent.
 - Brug af CAS
 - Screencast med forklaring på model og brug af CAS
 - Dele fx på Skoletube
4. Eleven som ansvarlige deltager.
 - Konstruktiv feedback

Eleven opfylder punkt 3 ved at udarbejde en skærmoptagelse og har i opgaven også været den kritiske undersøger (1), der har fundet informationer om, hvad forskellige ting koster og hvad man evt. kan tjene, hvis man sælger kaninunger. Se evt. en del af en evalueringsoptagelse på dette link⁴.

Arbejdet med CAS, problemløsning og modellering i denne bog giver anledning til, at eleverne afprøver forskellige strategier og it-værktøjer. I denne arbejdsproces vil dialogen elev-elev og lærer-elev understøtte læringen og samtidig give anledning til at stille spørgsmål, der lægger op til matematisk samtale. Samtalen er en del af den sproglige udvikling, som desuden indeholder læsning, lytning og faglig skrivning. I bogen lægges der derfor op til, at eleverne skal argumentere og skrive løsningsforslag, og på den måde udvikle såvel deres matematiske kompetencer som deres fagsprog.

- 1) <http://brochure.aabc.dk/ventures/matematik-med-it/>
- 2) http://matematikmedit.dk/wp-content/uploads/2016/11/Matematik_med_IT_kapitel1.pdf
- 3) http://matematikmedit.dk/wp-content/uploads/2016/11/Matematik_med_IT_kapitel3.pdf
- 4) kortlink.dk/vnfd

Opslagsbøger

Formelsamlingen – Matematiske formler og fagord, Forlaget Matematik, 2. udgave 2017.

Gyldendals små opslagsbøger – Matematik, Hans Jørgen Beck, 2. udgave 2009.

Gyldendals Minilex, Matematik, Søren Halse, Erik Laage-Petersen, Jens Peter Touborg, 1. udgave 2005.

Kæledyr

Opslaget lægger op til matematisk modellering af en tænkt, men alligevel realistisk situation, som eleverne kan sætte sig ind i eller kender til. Ud over det rent matematikfaglige kan almene aspekter vedrørende hold af kæledyr også indgå i den fælles indledende samtale.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Tegning og tekst er sammen med evt. supplerende litteratur eller opslag på nettet¹ udgangspunkt for en fælles samtale i klassen, hvor man kommer omkring de fire spørgsmål, som er listet op. På frikanin.dk er der en oplysning om, at det koster 3000 kr. om året at holde kanin. Hvordan kan de være kommet frem til dette beløb? Som inspiration til undersøgelserne kan man bruge reklamer fra de lokale dyreforretninger.

Nederst til højre på side 4 er vist et klip med et eksempel på, hvordan man kan bruge et CAS-værktøj. Den stiplede linje i eksemplet antyder, at der er klippet oplysninger ud.

Hvis det er første gang eleverne skal bruge et CAS-værktøj, bør man bruge lidt tid på en introduktion af det CAS-værktøj, som de skal bruge. På nettet er det muligt at finde videoer med kort introduktion af CAS².

Elevernes undersøgende arbejde

Eleverne arbejder i denne fase parvis eller evt. i mindre grupper på 3 elever.

Opgave 1 lægger op til en systematisering af udgiftsposter med tilhørende beløb.

I **opgave 2** skal eleverne bruge CAS til at opstille en matematisk model til beregning af udgifterne. For nogle elever går dette uden problemer, mens andre vil have brug for først at skrive deres model på et stykke papir inden de omsætter til en model i CAS-værktøjet. Når modellen er opstillet, og beregningerne er gennemført, er det vigtigt, at eleverne vurderer både model og modelresultat. De skal ikke nødvendigvis skrive, men formulere deres overvejelser for hinanden.



Victor Larracuente, Unsplash

Opgave 3 er central, fordi her kommer eleverne til at arbejde med undersøgelser af formen: Hvad sker der hvis ...?

Fælles opsamling

De fem spørgsmål, som er i rammen, er udgangspunkt for den fælles opsamling. Her er det vigtigt, at processen bliver vægtet.

Brugen af CAS-værktøj bør synliggøres, selvom der ikke direkte spørges til det. Eleverne skal opleve, at CAS i denne sammenhæng er et stærkt værktøj, når en model skal efterprøves. CAS-værktøjet er undersøgelsesværktøjet, som klarer de regnetekniske udfordringer i undersøgelsen. Spørg direkte til, hvorfor det er smart at bruge CAS.

Brug af digitale værktøjer

I opslaget lægges op til brug af CAS, som har den funktionalitet, at eleverne kan se de variable, regneudtryk og beregnede værdier. Det vil også være muligt at bruge et regneark til arbejdet, men her vil variable og regneudtryk være skjult. Både brugen af CAS og regneark åbner for muligheden for også i 4. klasse at gennemføre undersøgelser af typen, hvad sker der, hvis ...? Det er muligt at ændre værdier og indsætte nye variable i modellen.

1) <https://frikanin.dk>

2) <https://www.youtube.com/watch?v=RgHgUUihMKg>

En tur i biografen

IS Prislister	
Vaffel	5 kr.
Bæger	3 kr.
1 Kugle	19 kr.
2 Kugler	27 kr.
3 Kugler	33 kr.
Drys	3 kr.
Skum	5 kr.

Temaerne på opslaget er to kendte hverdagssituationer. På den venstre side er temaet køb af is, mens der er fokus på en klassetur i biografen med sodavand, slik og popcorn i opgaverne på højre side.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

I introduktionen præsenteres en problemstilling, som behandles med to forskellige digitale værktøjer. Prisen for en is med kugler sammensættes af de valg, der foretages. I eksemplet er der tydelig 'mængderabat' på antallet af kugler. Problemet er enkelt at forstå, så der kan straks fokuseres på at lægge en plan. I indledningen kan det også give mening at lave et overslag over, hvor meget det kan koste at købe de 5 is. Opgaven indeholder tillige valg af digitalt værktøj. Problemstillingen behandles både i et CAS-værktøj og i regneark. I CAS-værktøjet er hvert enkelt element i købet defineret med en værdi. I den dynamiske beregning på siden har familien tænkt sig at købe de fem is med disse valg:

Vaffel	Bæger	1 kugle	2 kugler	3 kugler	Drys	Skum
3	2	2	1	2	4	1

Hvis regnearket vælges som digitalt værktøj, opstilles problemet på den måde, det vises på illustrationen. Når resultatet er beregnet, bør det vurderes i forhold overslaget, ligesom det kan diskuteres, hvilke af de valgte digitale værktøjer, der synes bedst egnet til netop denne problemstilling.

Elevernes undersøgende arbejde

Eleverne arbejder parvis omkring opgaverne og kan vælge mellem to digitale værktøjer. De kan oprette et regneark som det viste med priser i kolonne B og formler i cellerne i kolonne D, eller de kan anvende et CAS-værktøj til beregninger og løsning af opstillede ligninger.

I **opgave 1** opretter eleverne et regneark for derefter at vise en beregning, der giver 1950 kr. De kan forklare, enten at de har multipliceret de to celler B4 og C4,

På prislister kan man se, at en vaffel koster 2 kr. mere end et bæger.

Man kan også se, at hvis man ønsker 2 kugler koster de 27 kr., mens 3 kugler kan fås for 33 kr.

eller at de har beregnet det ønskede i et CAS-værktøj:

$$75 \cdot kr. \cdot 26 = 1950 \cdot kr.$$

Opgave 2

Undersøgelsen, der viser, at det har klassen ikke råd til, kan igen foretages enten i regnearket eller i et CAS-værktøj: $1950 + 260 + 260 + 988 = 3458$. Konklusionen er, at det har de ikke råd til.

Opgave 3

Hvis eleverne vælger at udføre undersøgelsen i regnearket, kan de forsøge sig frem ved at ændre på C2, der angiver antallet af elever. I et CAS-værktøj vil en løsning være, at de højst må være de 17 elever: $elever \cdot 75 + elever \cdot 22 + elever \cdot 15 + elever \cdot 38 < 2500$

Opgave 4

Her er mange mulige løsninger med udgangspunkt i de 26 elever. Regnearket er et rigtig godt værktøj til hurtigt at udregne konsekvenser af beslutninger, eleverne må tage.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan ske ved at klassen i fællesskab drøfter, hvordan der er arbejdet med de forskellige undersøgelser, og hvordan de har brugt CAS i undersøgelserne. Opsamlingen kan indeholde diskussion af, hvad de forskellige digitale værktøjer kan – eller ikke kan.

Brug af digitale værktøjer

I opslaget er eksempler, hvor forskellige digitale værktøjer er anvendt. I CAS-værktøjet er de variable til at se, mens regnearket har en del informationer skjult i cellerne. Det er vigtigt, at eleverne kender flere digitale værktøjer godt, så de i den enkelte situation kan foretage et begrundet valg mellem dem.

At gå op i

I dette tema arbejdes med fire vigtige, matematiske begreber: *divisor*, *primtal*, *sammensatte tal* og *at gå op i*. Der arbejdes kun med naturlige tal, altså positive, hele tal.

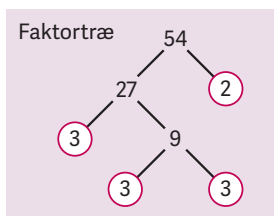
$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}} = \text{kvotient}$$

Et primtal er et tal med netop to divisorer, tallet 1 og tallet selv. Den definition udelukker tallet 1 som primtal, da tallet 1 jo kun har en enkelt divisor, nemlig 1. Sammensatte tal er alle de tal, der ikke er primtal. *At gå op i* betyder her, at resultatet af divisionen, kvotienten, bliver et helt tal frem for et decimaltal. I dette tema arbejdes kun med naturlige tal, altså positive, hele tal.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

På venstresiden eksemplificeres de fire begreber. Det er vigtigt i den indledende samtale om temaet at sikre sig, at eleverne forstår begreberne.

På siden præsenteres et faktortræ.



Tallene opløses i etaper fra toppen, hvor $54 = 27 \cdot 2$.

Tallet 2 er et primtal, og det stopper den gren, mens de 27 opløses til $27 = 9 \cdot 3$.

Tallet 3 er et primtal, og det stopper den gren, mens de 9 opløses til $9 = 3 \cdot 3$.

54 kan altså skrives som en primfaktoropløsning: $2 \cdot 3^3$.

Det giver i alt 8 divisorer i 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 og 54. Antallet af divisorer kan også findes ved hjælp af eksponenterne alene.

Tallet 2 har en ikke-synlig eksponent 1 og kan derfor også skrives som 2^1 .

Antallet af divisorer kan findes ved at addere 1 til hver af eksponenterne og derefter multiplicere dem:

$$1 + 1 = 2, 3 + 1 = 4: 2 \cdot 4 = 8.$$

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1. Her kan aflæses, at 31 har færrest og 48 flest divisorer.

12	25	28	31	48	56	99	100
6	3	6	2	10	8	6	9

Opgave 2. Eleverne fremstiller en taltavle som i bogen, men alle felter farves i overensstemmelse med farvekodningen. På den baggrund bliver svarene på påstandene:

- Falsk: Der er ingen sammenhæng mellem et tals størrelse og antallet af divisorer i tallet.
- Sandt: Kun kvadrattallene har et ulige antal divisorer.
- Falsk: Tallet 48 har flere divisorer end tallet 36.
- Falsk: Primtal er defineret ved at have netop 2 divisorer.
- Falsk: For eksempel har tallet 10 fire divisorer, mens tallet 20 har seks divisorer.
- Sandt: Tallet 16 har divisorerne 1, 2, 4, 8 og 16.
 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

Opgave 3. Funktionen $\text{sfd}[\text{tal}, \text{tal}, \dots]$ angiver den største fælles divisor, som er det største tal, der går op i de valgte tal. Funktionen kan fx anvendes, når en brøk skal forkortes. I mange CAS-værktøjer anvendes den engelske forkortelse gcd: greatest common divisor.

Den fælles opsamling

Den fælles opsamling kan ske ved at klassen i fællesskab drøfter, hvordan der er arbejdet med taltavlen. Hvilke strategier har de anvendt til at finde antallet af divisorer, og har de fundet frem til samme løsning? Hvilke påstande har de selv fremsat – og kan de andre elever sige sandt eller falsk til dem?

Brug af digitale værktøjer

CAS-værktøjerne giver på forskellige måder muligheder for at undersøge divisorer. I denne opgave har antallet af divisorer været i fokus, men angivelse af de enkelte divisorer og deres sum kan også foretages. Se også temaet *Faktorisering*.

Hvis svaret er...

Opslaget vender op og ned på det sædvanlige arbejde med matematik. Her bliver eleverne udfordret på at stille opgaver til nogle svar, der er givet på forhånd. De svar, der er givet her, er af forskellig karakter, så flere stofområder bliver berørt. Det vil være oplagt at fortsætte arbejdet med dette fokus, hvor det er eleverne, der giver hinanden svar, og efterfølgende finder opgaver, der kan have dette svar. Her vil eleverne med sikkerhed finde forskellige opgaver, så man i den sammenhæng kan tale om, at forskellige opgaver kan have samme svar, ligesom samme opgave kan have forskellige svar.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Som indledning til arbejdet med opslaget er det en god ide at opfriske det eller de stofområder, eleverne senest har arbejdet med. Det vil give eleverne en bedre mulighed for at kunne stille opgaver til givne svar, når deres forforståelse er på plads.



Foto: Jørgen Uhl Pedersen

De tre kategorier af opgaver, der er beskrevet, giver mulighed for undervisningsdifferentiering, da alle kan byde ind med en opgave til samme svar. Giv plads til, at alle elevers bud er lige gode, og giv tid til, at eleverne kan fordybe sig og prøve sig frem. I forbindelse med arbejdet med eksemplet på venstresiden, vil det være en god ide at udarbejde en fil, der kan vises på

en skærm i klassen – det vil give mulighed for at vise it-værktøjets dynamik. Derudover lægger det op til, at læreren kan give flere svar, som eleverne skal finde opgaver/grafer til.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgaverne er henvendt i 'du'-form, men det vil også være givende, hvis eleverne arbejder i makkerpar. Samarbejdet vil være med til at fremme kommunikationen og give eleverne mulighed for at argumentere for deres valg af opgaver til de givne svar.

Opgave 1 lægger op til at eleverne både ved hjælp af inspektion og i deres CAS-værktøj kan afprøve forskellige opgaver, der kan have svaret $x = 5$.

Opgave 2 følger op på venstresidens introduktion af denne type opgave, og giver mulighed for at udnytte den dynamiske del af it-værktøjet.

Opgave 3 giver anledning til at arbejde med at forlænge og forkorte brøker samtidig med at udvikle strategier i forhold til arbejdet med mønstre. Hvis eleverne finder et mønster, eller ræsonnerer sig frem til en måde at udelukke nogle muligheder, vil det være godt at tage op i klassen.

Fælles opsamling

Opslaget lægger i høj grad op til, at eleverne får lejlighed til at fremlægge deres ideer til opgaver. Denne opsamling kan være med til at udvikle elevernes forståelse af matematiske processer og dermed vise, at disse processer kan være forskellige og alligevel nå samme mål. Fokus må gerne være på, at der ikke er noget matematik, der er 'finere' end andet, og at alle dermed deltager på lige fod.

Brug af digitale værktøjer

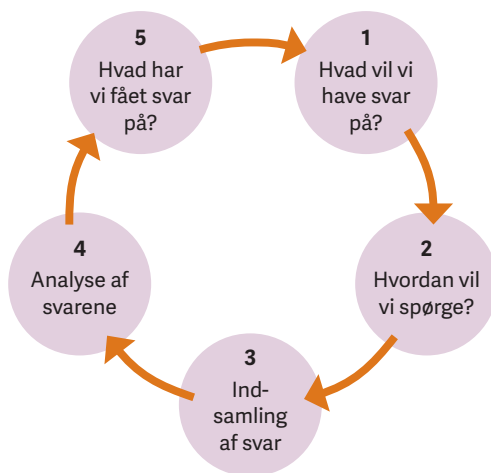
I opslaget er det især dynamikken i it-værktøjerne, der er fremherskende. Styrken ved at kunne prøve sig frem uden at skulle skrive eller tegne mange forskellige muligheder, er i fokus.

En spørgeskemaundersøgelse

I opslaget bliver der introduceret en model for arbejdet med indsamling af data ved en spørgeskemaundersøgelse. Indsamlingen af data sker fx ved, at eleverne anvender et digitalt værktøj. Efterfølgende bruger de digitale værktøjer til behandling af de indsamlede data. Databehandlingen kan ske enten direkte i indsamlingsværktøjet eller ved at overføre data til et CAS-værktøj eller regneark.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Diagrammet her viser en cyklus, som i litteraturen¹ omtales, som datadetekтивens cyklus. Her er den givet i en bearbejdet form, som kan bruges sammen med elever.



Brug tid i klassen til at få fælles ideer om, hvad man kan undersøge, og formuler i fællesskab et eksempel på en problemstilling, som det er muligt at få svar på. Spørgsmålene, der er listet op nederst side 12, er tænkt som et oplæg til den vigtige proces med at udforme undersøgelsesspørgsmålene.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1 og 2 har direkte relation til introduktionen og de to første punkter i datadetekтивens cyklus. Ved udformning af spørgsmål og indsamling af svar kan eleverne med fordel bruge et digitalt værktøj.

Eleverne udgiver eller deler deres spørgeskemaundersøgelse. Hvis spørgeskemaet er fremstillet ved

at bruge et digitalt værktøj, er det smart at dele spørgeskemaet via et kortlink eller en QR-kode. Det er enkelt, og eleverne slipper senere for det trivielle arbejde med at opgøre data.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling knytter sig til **opgave 4** og **opgave 5**, hvor eleverne skal analysere og præsentere resultatet af deres undersøgelse. I forbindelse med elevernes præsentation vil det tydeligt fremgå, hvordan de har grebet arbejdet an. Her bør eleverne have kritik i forhold til de spørgsmål, de har stillet, hvilke svar de forventede, og hvad de har fået svar på. En væsentlig pointe knytter sig til den gruppe, som man har valgt at undersøge. Hvilke svar på spørgsmålene ville man forvente, hvis man nu havde spurgt i en 1. klasse eller spurgt kunderne i det lokale supermarked?

Brugen af digitale værktøjer bør også indgå i den fælles opsamling.

Brug af digitale værktøjer

Der findes flere forskellige værktøjer fx Google Analyse², SurveyXact³ eller SurveyMonkey⁴, som alle kan anvendes til denne type undersøgelser. For de fleste værktøjer gælder, at man skal have en form for konto. Hvis man vil bruge Google Analyse og skolen ikke har en Google konto, kan det anbefales, at man opretter en fælles konto for klassen.

De fleste digitale spørgeværktøjer genererer automatisk forskellige diagrammer, som det er muligt at bruge i analysen. Desuden er det muligt at hente data til en fil, som kan bearbejdes i et regneark eller et CAS-værktøj.



Foto: Colourbox

- 1) Hansen, H.C. m.fl., 2013, Stokastik, Matematik for lærerstuderende, Samfundslitteratur
- 2) https://youtu.be/A_PF3b3KqBU
- 3) <https://www.surveyxact.dk/>
- 4) <https://da.surveymonkey.com/>

Væddemålet

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Opslaget har særligt fokus på problemløsning og forskellige tilgange til løsning af problemet. Det kan være en god ide i dette opslag at fokusere på modellen til højre på denne side, som også er præsenteret på side 6 i denne vejledning. En uddybning af modellen og forslag til arbejdsspørgsmål kan findes på matematikmedit.dk

Opgaven kan iscenesættes med konkrete materialer, eller med opfordringer til at eleverne prøver forskellige tilgange i deres arbejdsproces.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgaven lægger op til at eleverne skal arbejde med at forstå problemet – mon det kan lade sig gøre, at de har det samme beløb tilbage i hver deres pung, når de ikke har det samme i starten?

De skal lægge en plan for deres proces og gennemføre planen ved at arbejde på forskellige måder. Det er vigtigt at fortælle eleverne, at der ikke er nogle processer, der er mere korrekte end andre, og at der bliver lagt vægt på, at de kan forklare deres løsningsmetoder.

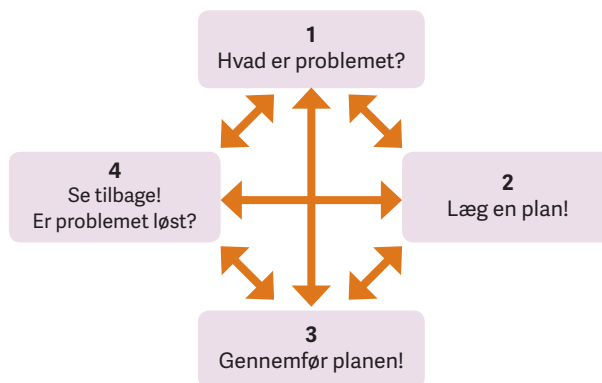
De forskellige repræsentationer af løsningen er en del af opgaven, for at give eleverne et overblik over de forskellige veje til løsningen.

Mulighed for at gøre opgaven lettere eller sværere:

- De to drenge kan have færre mønter til rådighed.
- De to drenge skal lægge flere mønter ad gangen til indkøbet.
- Der kan være flere drenge med forskelligt antal mønter, der skal betale til indkøbet

Fælles opsamling

Når eleverne ser tilbage og gennemgår deres løsninger er det oplagt at gøre dette i fællesskab. Eleverne kan på denne måde blive opmærksomme på, hvilke strategier, de mener, der er de mest oplagte, og de kan få ideer til andre måder at løse problemet på. Samtalen i denne fase kan være med til at udvide elevernes 'værktøjskasse' i en matematisk arbejdsproces og



dermed give dem redskaber til at løse problemer stillet i en anden kontekst.

Brug af digitale værktøjer

Tre ud af de fire måder, opgaven skal løses på, er ved hjælp af de digitale værktøjer. I arbejdet med at løse opgaven med et CAS-værktøj kan eleverne prøve sig frem, oversætte problemet til to ligninger med to ubekendte eller en ulighed. Grafisk kan de to ligninger fremstilles som grafer i et koordinatsystem, hvor skæringspunktet kan aflæses. Endelig er det muligt at indtaste drengenes betalinger i et regneark og der aflæse, hvem der vinder væddemålet. Kravet om at løse opgaven på flere forskellige måder, er i tråd med det at arbejde problemløsende. Hvis eleverne skal blive gode problemløser, er det fint at kunne se flere mulige processer for sig, så de har flere strategier at gribe til i problemløsningsprocessen.



Foto: Colourbox

Talfølger og figurfølger

I dette tema arbejdes med rækkefølger af tal og rækkefølger af figurer. Figurerne er her kubeformede klodser. Klodserne er tegnet i Isometric-Drawing-Tool¹, som er et enkelt og håndterbart redskab i denne sammenhæng – også selv om tegnefladen er begrænset. GeoGebras isometriske papir kan også anvendes, men det bliver en noget mere besværlig arbejdsgang her.

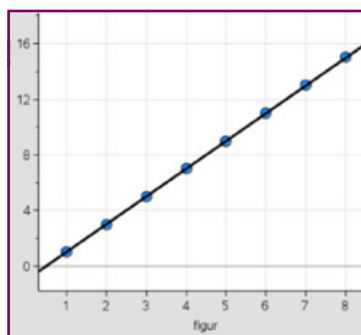
Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Begrebet rækkefølger i matematik introduceres med to enkle eksempler. I talfølgen er 3-tabellen grundlaget for rækkefølgen. I figurfølgen vises, hvordan den udvikler sig, hvis der lægges en klods til hver gang.

Den anden del af siden indeholder tre forskellige repræsentationer af en figurfølge, der starter med (1,1) og fortsætter med (2,3), (3,5), (4,7) osv.

Der sættes en klods på i hver ende af figuren, som derfor vokser med 2 hver gang. Indsættes de sammenhængende

værdier i et digitalt værktøj, kan der tegnes en graf, der viser en lineær udvikling. Funktionen er tegnet i TI-Nspire CAS, og funktionsforskriften findes ved regression til: $2x - 1$



Elevernes undersøgende arbejde

I opgaverne bringes alle repræsentationer i spil.

Opgave 1

Opgaveformuleringen indeholder ikke krav til regression, men det er medtaget her i lærevejledningen.

- Rækkefølgen A vokser med 4 hver gang.

Regression: $f(x) = 4 \cdot x - 2$

- Rækkefølgen B vokser først med 1, så med 2, derefter med 3 osv.

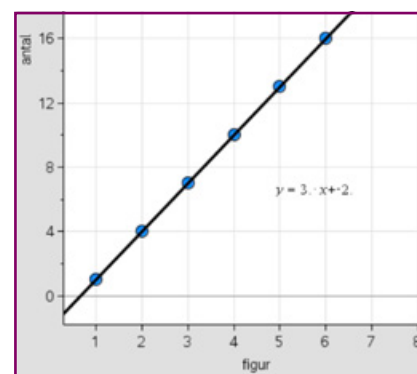
Regression: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 1$

- Rækkefølge C vokser med 3, 5, 7 – men er også kvadrattallene.

Regression: $f(x) = x^2$

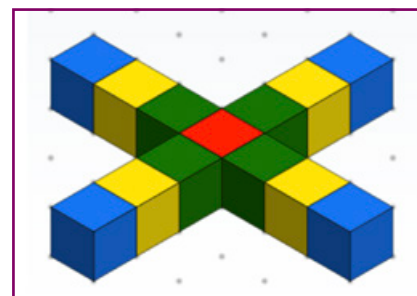
Opgave 2

Opgaven er her løst i TI Nspire CAS og funktionsforskrift $f(x) = 3 \cdot x - 2$



Opgave 3

Den fjerde figur i figurfølgen:



Fælles opsamling

Den fælles opsamling foregår ved, at der i fællesskab drøftes, hvordan der er arbejdet med de forskellige undersøgelser. Det diskuteres også, hvordan CAS-værktøjer er brugt i undersøgelserne, herunder hvilke CAS-værktøjer eleverne har anvendt til løsning af opgaverne.

Brug af digitale værktøjer

De forskellige digitale værktøjer, eleverne har til rådighed, kan de samme ting, men der er forskel på de syntakser, der skal til at skabe de forskellige grafiske udtryk. Valg af digitale værktøjer afhænger af opgavens karakter, de digitale værktøjer, der er til rådighed og lærerens og elevernes kompetencer.

1) <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Isometric-Drawing-Tool/>

Rumfang

I dette tema skal der arbejdes med rumfang af kasse og af cylinder. Udgangspunktet er en kendt dagligdags situation, hvor der skal blandes saftevand i et forhold, der angivet på kartonen eller flasken med den koncentrerede saft.

Blandingsforhold på emballagen angives som fx enten 1 + 4 eller 1 : 4, og forholdet læses ofte som 1 til 4, uanset hvordan det er angivet.

Der er derfor en indledende samtale om de matematiske konsekvenser af den måde, som blandingsforholdet er angivet på i den aktuelle emballage.

Materiale

Kartoner med saft der skal blandes i et bestemt forhold. Cylinderformede glas.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Det anbefales at medbringe en karton med koncentreret saft, som kan være udgangspunkt for undersøgelser. Hvis det er muligt at fremskaffe cylinderformede glas, kan nogle af opgaverne her udføres i praksis. Normalt er plastikkrus typisk formede som keglestubbe, så de kan stables. Problematikken med at arbejde med at hælde saft i krus med form som en keglestub er behandlet i Bog 2.

Når kassen har mål som angivet i opslaget, 7 cm × 7 cm × 25 cm, kan der være noget mere end en liter i den. Den undersøgelse, der foreslås i opslaget, holder målene på bunden fast og så kan højden på 20,4 cm findes ved løsning af en ligning som denne:

$$7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \cdot \text{højde} = 1000 \text{ cm}^3.$$

Cylinderen kan være en ny figur for nogle elever på mellemtrinnet, men med et CAS-værktøj er det enkelt at foretage de ønskede beregninger. Det nøjagtige rumfang beregnes til knap 300 cm³

$$\pi \cdot 3^2 \cdot 10 \approx 282,74$$

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1

Kartonen kan sagtens indeholde en liter:

$$7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} = 1078 \cdot \text{cm}^3$$

Opgave 2

Højden i kartonen kan findes ved at løse ligningen $9 \cdot 6 \cdot \text{højde} = 1000$ og få godt 18 cm.

Opgave 3

Det cylinderformede glas har højden 11 og radius 3 cm og rumfanget: $\pi \cdot 3^2 \cdot 11 \approx 311 \text{ cm}^3$.

Rumfanget af saften er: $\pi \cdot 3^2 \cdot 2,5 \approx 71 \text{ cm}^3$

Der skal hældes 4 dele vand oveni:

$$71 \text{ cm}^3 \cdot 4 = 284 \cdot \text{cm}^3$$

Tilsammen fylder saft + vand:

$$71 \text{ cm}^3 + 284 \text{ cm}^3 = 355 \cdot \text{cm}^3$$

Og den samlede mængde kan ikke være i glasset, så saften bliver stærkere end det, Maria ønsker, hvis hun hælder vand i, til glasset er fyldt.

Opgave 4

Den ønskede karton er en kube med en sidelængde, der opløftet i tredje giver 1000 cm³.

Det ønskede resultat på 10 cm kan findes ved at løse ligningen $x \cdot x \cdot x = 1000$ eller ved at finde kubikroden af 1000. Selv om det ligger uden for mellemtrinnets niveau, kan det måske alligevel vises som en mulighed, der ligger indenfor elevernes rækkevidde, når man anvender et CAS-værktøj $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan sætte fokus på de resultater, der er kommet ud af overvejelser og beregninger. Hvis der i iscenesættelsen arbejdes med hypoteser omkring problemstillingerne, kan de nu bekræftes eller afkræftes. En fælles samtale kan handle om, hvordan hypoteser kan bruges til at vurdere resultater.

Brug af digitale værktøjer

I dette tema er fokus på problemløsning, og der skal både foretages ligningsløsning og beregninger med formler, som enten er nye eller måske endda ukendte for eleverne. Brugen af CAS vil sikre hurtige og korrekte beregninger, så fokus kan være på problemløsningen.

Talstrengene i taltavlen

Udgangspunktet for elevernes undersøgende arbejde i dette opslag er taltavlen eller hundredtavlen, der er arbejdet med i den indledende matematikundervisning. Den findes i flere varianter, som alle bygger på egenskaber ved positionssystemet. Ved at arbejde med opslaget får eleverne genopfrisket og udbygget deres viden om positionssystemet samtidig med, at de bliver introduceret til brugen af variable.

Materiale

Trykte taltavler til elevernes undersøgende arbejde.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Arbejdet med taltavlen introduceres ved at vise taltavlen for eleverne og ved at gennemføre den fælles drøftelse og den fælles undersøgelse af den gule 4-streng. Den indledende drøftelse skal sikre, at eleverne genopdager egenskaber ved positionssystemet. Sideløbende med den fælles diskussion kan eleverne tegne og regne på deres egne taltavler

For mange elever er det overraskende, at summen af de to midtartal er lig med summen af de to ydertal i en vandret 4-streng. Brug tid på at undersøge andre 4-strengene og lad eleverne selv formulere deres opdagelse som en hypotese. De fleste elever vil godt kunne begrunde gyldigheden af deres opdagelse.

Produktet af midtertallene minus produktet af ydertallene giver altid 2. Her prøver alle i klassen med forskellige talstrengene, og på baggrund af resultaterne opstiller man hypotesen om, at forskellen altid er 2. Iscenesættelsen afsluttes med, at man i fællesskab drøfter, hvordan man kan bruge et CAS-værktøj¹ til undersøgelsen.

Elevernes undersøgende arbejde

I **opgave 1** gentager eleverne undersøgelsen i en lodret 4-streng, hvor tallene vokser med 10, når man går et skridt ned.

Summen af ydertallene minus summen af midtertallene er også i dette tilfælde 0, mens forskellen mellem produktet af midtertallene og produktet af ydertallene er 200.

I **opgave 2** arbejder eleverne med en undersøgelse af en skrå talstreng, hvor der er givet nogle påstande, som eleverne skal undersøge gyldigheden af. Påstand 1, 2 og 4 er sande.

I **opgave 3** skal eleverne bruge et CAS-værktøj til at undersøge, hvad der sker, når man bruger et vilkårligt tal som udgangspunkt. Det vil nok ikke være alle elever, som vil godtage, at man kan skifte et tal ud med en variabel (et bogstav).

I **opgave 4** bliver der lagt op til andre undersøgelser af talstrengene i taltavlen. Det er muligt at differentiere med undersøgelser af andre figurer i taltavlen.

Fælles opsamling

Den fælles opsamling kan ske ved, at klassen i fællesskab drøfter, hvordan der er arbejdet med de forskellige undersøgelser, og hvordan de har brugt CAS i undersøgelse.

Det sidste spørgsmål kan man vægte afhængigt af klassetrin, da der typisk er stor forskel på elevernes abstraktionsniveau i en 4. klasse og en 6. klasse.

Brug af digitale værktøjer

Til undersøgelserne i dette opslag vil brugen af CAS bidrage til, at eleverne hurtigt og sikkert kan undersøge forskellige talstrengene og på baggrund af deres undersøgelser formulere hypoteser. Ved at erstatte det første tal med en variabel vil eleverne kunne bruge et CAS-værktøj til at bevise de opstillede hypoteser.



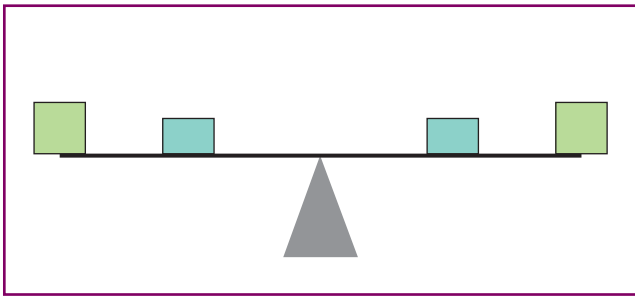
Foto: Jørgen Uhl Pedersen

1) <https://youtu.be/jl7avNo84jl>

Ligninger

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Opslaget om ligninger handler i høj grad om, at eleverne bliver bevidste om den balance, der skal være til stede i et udsagn med lighedstegn. Hvis eleverne ikke har beskæftiget sig med denne tilgang til lighedstegnet, kan en visualisering af dette være en god tilgang. Det kan gøres på forskellige måder – en af disse er en fysisk balancevægt, hvor forskellige lodder med fast vægt placeres. En digital tilgang, som eleverne kan arbejde med, findes her: <http://demonstrations.wolfram.com/ALeverWithFourWeights/>



Arbejdet med konkrete materialer i forhold til ligninger skal foregå parvis, så eleverne kan hjælpe hinanden med at placere et ukendt antal tændstikker i æsken, for derefter at gætte og tjekke antallet. Eksemplet med fodboldkortene er en mulig hverdagsfortælling – find gerne selv på flere, eller lad eleverne finde på fortællinger, der kan omskrives til matematikprog. Denne type fortællinger kender eleverne måske fra deres arbejde med regnehistorier, men de kan godt opleve, at det er en svær teksttype at håndtere. Det er derfor meget vigtigt, at læreren stilladserer og modellerer denne type opgaver¹, så eleverne ikke får misopfattelser i denne sammenhæng.

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1 ligger meget op ad introduktionen, og igen vil det være en fordel, hvis eleverne har adgang til konkrete materialer, hvis de er usikre på denne type af opgaver. Opgaven lægger vægt på, at eleverne kan formulere ligningen og derefter svare på opgaven. Denne arbejdsform er valgt, fordi det oftest er i

oversættelsen til matematikprog, at eleverne oplever udfordringer.

Opgave 2 ligner opgave 1 som type, men er formuleret med fokus på 'mangler', så eleverne kan vælge at anvende addition i en direkte oversættelse, og subtraktion, hvis de tænker på 'mangler' som et begreb i den sammenhæng. Opgave 2 anvender større tal end opgave 1.

Opgave 3 består af to spørgsmål, som skal besvares i forlængelse af et udtryk. Eleverne skal her beregne udtrykket og derved finde svarene på det første spørgsmål. Anden del af spørgsmålet skal besvares af såvel en opstilling som en beregning. Her kan eleverne vælge at tage udgangspunkt i alle bogens sider, eller at anvende deres beregning fra første del af spørgsmålet i opstillingen af ligningen. Der er altså mulighed for to forskellige udtryk.

Fælles opsamling

Lad eleverne tale om, hvornår det giver mening at anvende henholdsvis 'gæt og tjek', papir og blyant eller CAS-værktøj i forbindelse med arbejdet med ligninger.

Brug af digitale værktøjer

CAS-værktøjet understøtter arbejdet med ligninger i processen, hvor eleverne bliver fortrolige med at omformulere hændelser, der er beskrevet, til matematikprog. De kan lettere prøve sig frem, når de arbejder digitalt, end hvis de skal forsøge sig med flere ligninger på papir, som de skal løse.



Foto: Bjørn Rasmussen

1) Mulvad, Ruth: Sprog i skole, Alinea.

Statistik

I dette tema er statistik det matematiske fokus. Med udgangspunkt i situationer fra elevernes liv og hverdag introduceres diagrammerne stolpe- og cirkeldiagram med tilhørende observationer. I opgaverne arbejdes desuden med de statistiske deskriptorer gennemsnit, middeltal, størsteværdi, mindsteværdi og median.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Elevernes omverden er fuld af indhold, der kan anskues med 'matematikbriller'. Her præsenteres en øvelse omkring antallet af kæledyr. Den kan gentages i klassen, og kæledyr kan erstattes eller suppleres med antallet af søskende.

Optællingen kan vises i forskellige repræsentationer – her på siden er vist en tabel, et stolpediagram og et cirkeldiagram, der på hver sin måde giver et udtryk for hyppigheden eller den relative hyppighed. En fælles øvelse kan indledes ved at bede hver enkelt elev om på forhånd at undersøge, hvor langt eleven har til skole. Det vil eleverne gøre på forskellige måde, hvis spørgsmålet stilles åbent. Nogle af eleverne ved det måske allerede, mens andre kan finde ud af det ved hjælp af et digitalt kort eller måle turen til skolen med et digitalt redskab.

Her vil observationerne være så forskellige, at det kan være nødvendigt at samle dem i intervaller og lade de enkelte intervaller fremstå som enkelte observationer.

Det indledende spørgsmål med middeltal og afstande har som formål at iscenesætte begrebet middeltal og skabe en relation til begrebet frem for en instrumental tilgang, hvor eleverne bare kan lægge et antal observationer sammen og dividere med lige så mange der er. Der er derfor mange mulige, rigtige svar på det spørgsmål, fx

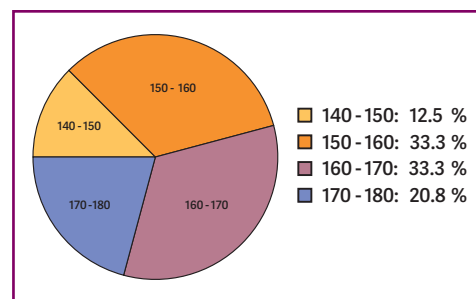
$$\frac{1200 + 200 + 625 + 775 + 700}{5} = 700$$

Elevernes undersøgende arbejde

Hvis eleverne anvender et regneark i arbejdet med **Opgave 1**, kan suppleres med et spørgsmål om at

skabe et observationsæt, der giver andre middeltal. På den måde kan der arbejdes dynamisk, og andre svar end de 160,5 cm i opgaven vil fremkomme.

Opgave 2 er analog til den indledende opgave med afstande til skole, og der er uendelige mange rigtige svar. Det kan give mening at tale sig frem i fællesskab til et interval for klassen. Diagrammet i **opgave 3** kan se sådan ud i MatematiKan:



MatematiKan

Mindsteværdien for observationsættet er 143 cm og størsteværdien er 178 cm. I et observationsæt med et lige antal observationer kan medianen angives på to måder. Den angives enten som den mindste af de to midterste værdier eller som et gennemsnit af de to. I det første tilfælde er værdien her 160 cm og, i det andet er den 160,5 cm.

Fælles opsamling

Det er oplagt at dele de forskellige løsningsforslag, som eleverne er kommet frem til i de forskellige opgaver og diskutere dem i fællesskab. Løsningsforslagene kan enten designes, så de kan hænges op i klassen, eller de kan lægges på en fælles digital platform, fx SkoleTube. Det er en diskussion værd, hvilke forslag der giver godt formidlede svar på opgaverne.

Brug af digitale værktøjer

På siderne i elevbogen og her i lærervejledningen anvendes forskellige digitale værktøjer. CAS-værktøjerne sikrer både korrekte beregninger og diagrammer. I nogle af opgaverne kan med fordel anvendes et regneark, hvor eleverne kan prøve sig frem for på den måde at finde mulige svar.

Overfladen af en hund

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Dette opslag indeholder mulighed for at arbejde med modellering i matematik. Eleverne skal bygge en model af en hund og sammenligne med mål indhentet fra www.msdivetmanual.com¹, som har fremstillet en tabel, der er udarbejdet på baggrund af nedenstående formel.

Oplæggets venstreside indeholder forskellige oplysninger, som eleverne skal anvende i deres undersøgelser. Prislisten angiver de priser, som eleverne skal sammenholde med tabellens oversigt over sammenhængen mellem hundens vægt og overfladeareal. Lad eleverne tale sammen om muligheden for at beregne overfladen af en hund ved hjælp af matematik. Brug tabellen i samtalen med eleverne, så de får et indblik i opbygningen af tabellen. Formlen, som ligger til grund for tabellen, er indsat her:

$$\text{Overfladeareal af hund i kvadratmeter} = 10,1 \times (\text{vægt i gram})^{2/3} \times 10^{-4}$$

Elevernes undersøgende arbejde

Opgave 1 er oplagt til arbejde i par, så eleverne kan samtale om de forskellige former.

Mulige former kan være:

- Forben: Cylinder
- Bagben: Cylinder og kegle
- Hoved: Kasse og prisme
- Krop: Cylinder og keglestub
- Hale: Cylinder
- Hals: Cylinder.

Alt efter hvor mange forskellige rumlige figurer I vælger at inddrage, vil beregningerne blive mere eller mindre realistiske.

Byg en hund giver anledning til at måle og beregne på de forskellige rumlige figurer, eleverne vælger at anvende. Her kan CAS-værktøjet være en støtte i udregninger, særligt hvis eleverne vælger nogle former, som de ikke tidligere har arbejdet med i forhold til beregning af overflade.

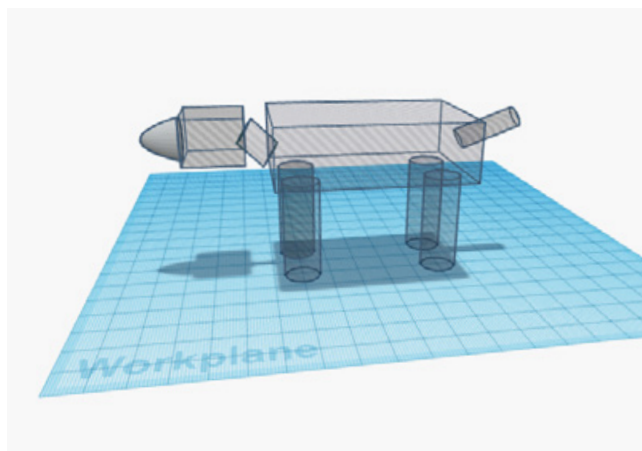
Opgave 2 indeholder en del beregninger i forhold til de målinger eleverne har foretaget på deres hunde. Sammenhængen mellem overflade, vægt og pris undersøges med et it-værktøj, og eleverne kan foretage sammenligning med tabellen på venstresiden.

Fælles opsamling

Det er oplagt, at eleverne udstiller deres hunde og fremlægger deres mål og udregninger for hinanden, så de kan sammenligne de forskellige størrelser af hunde med tabellen og afgøre, om det er muligt at lave en model, der nogenlunde passer med virkeligheden.

Brug af digitale værktøjer

Arbejdet med formler bliver lettere at håndtere med it-værktøjer, da forskellige mål kan udskiftes, og beregninger kan foretages løbende. Der er ligeledes en del beregninger, der kan bearbejdes undervejs, når eleverne anvender digitale værktøjer. Hvis der er mulighed for at printe figurer i 3D printer, kan programmet Tinkercad anbefales til konstruktion af hundene. Der er en del udfordringer i 3D, da figurerne skal tilpasses i størrelse og placeres i forhold til hinanden i det arbejdsrum, der ligger i programmet.



Tinkercad

1) <https://www.msdivetmanual.com/special-subjects/reference-guides/weight-to-body-surface-area-conversion-for-dogs>

Regneruter

Målet med arbejdet med regneruter er, at eleverne skal arbejde med at oversætte en algoritme til et regneudtryk. Målet er også, at eleverne opdager en sammenhæng mellem starttallet og sluttallet. Ved at bruge CAS opnår man, at eleverne opnår en viden om brugen af variable i algebraiske udtryk.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

I bogen er vist et eksempel på en regnerute, men det kan måske støtte eleverne, hvis man viser flere eksempler. Klassen drøfter i fællesskab hvilke beregninger, der optræder i regneruten. Ved at prøve sig frem med de foreslåede værdier vil eleverne opdage sammenhængen mellem starttallet og resultatet.

Til slut skal regneruten oversættes til et regneudtryk med parenteser. Det giver anledning til at drøfte betydningen af en parentes i et regneudtryk.

Den trinvis oversættelse af regneruten til et regneudtryk kan ske ved, at man i fællesskab bliver enige om, at trin 1 i den givne regnerute kan skrives på denne måde: $(7 + 3)$.

Næste trin bliver så: $((7 + 3) \cdot 2)$.

Sidste trin, som giver resultatet, kan så skrives på denne måde: $((7 + 3) \cdot 2 - 5)$.

Gennemfør i fællesskab beregningen for hvert trin.

I næste eksempel skal der regnes baglæns. Det giver god mulighed for at tale om sammenhængen mellem regnearterne.

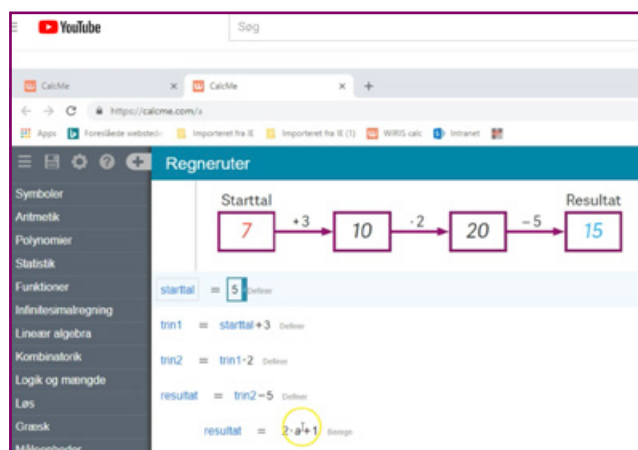
Regneruten kan læst fra højre mod venstre skrives som et regneudtryk på denne måde: $((1 + 5) : 2 - 3)$.

Nederst er vist, hvordan man kan bruge regnearket fra et CAS-værktøj til undersøgelsen. Det er også mu-

	A starttal	B	C	D resultat
=		=a[]+3	=b[]*2	=c[]-5
1	7	10	20	15
2	5	8	16	11
3	9	12	24	19
4	13	16	32	27

TI-Nspire CAS

ligt at bruge et CAS-værktøj på den måde, der er vist i denne video¹.



Elevernes undersøgende arbejde

Elevernes undersøgende arbejde i de tre opgaver følger samme fremgangsmåde som ved den fælles introduktion i klassen.

I **opgave 3** skal eleverne oversætte et regneudtryk til en regnerute.

Som en differentieringsmulighed er det oplagt at lade eleverne konstruere regneruter til hinanden, som de undersøger og oversætter til regneudtryk

Fælles opsamling

Her er det både processen og de opdagelser eleverne har gjort, der er i fokus. Det vil være en god ide at drøfte brugen af både parenteser og variable.

Brug af digitale værktøjer

Det er muligt både at bruge et regneark og et egentligt CAS-værktøj ved undersøgelsen. Fordelen ved at bruge CAS er, at de variable ikke er skjult for eleverne. I et regneark er de variable cellenavne, mens man i et CAS-værktøj selv kan navngive de variable på en meningsfuld måde. Det bliver vist i den video, der henvises til i fodnoten.

1) <https://youtu.be/B2C6FfkaID8>

Sammenhænge

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Indledningen til arbejdet med undersøgelsen er at tale sammen i klassen om de forskellige målinger på appen. Det er vigtigt, at eleverne bliver klar over, hvad de forskellige målinger viser, og hvilken sammenhæng der er imellem dem. Undersøgelsen af skridtlængden er vigtig i dette opslag, da eleverne skal arbejde med deres egne skridtlængder i opgaverne på højresiden.

Elevernes undersøgende arbejde

Eleverne skal i **opgave 1** arbejde med deres egne observationer og ved hjælp af it-værktøjer lave beregninger for sig selv.

Opgave 2 tager udgangspunkt i oplysningerne fra Anne-Mettes app. Tabellen repræsenterer oplysninger fra appen (som foto på venstresiden), og opgaverne lægger op til, at eleverne bearbejder de tilgængelige data, som er målt i Anne-Mettes app. Eleverne kan sammenholde forskellige data og dermed finde forskellige sammenhænge i tabellen. Lad eleverne anvende digitale værktøjer, som kan visualisere de relevante sammenhænge.

Opgave 3 vender tilbage til elevernes egne data. De skal her anvende nogle af de sammenhænge, som de har fundet i **opgave 2** i sammenhæng med egne data. De kan nu sætte deres egne data ind i de sammenhænge, de har visualiseret ved hjælp af deres it-værktøj og aflæse deres eget energiforbrug m.m.

Fælles opsamling

Elevernes egne data kan sammenlignes indbyrdes og med Anne-Mettes data, og opsamlingen kan give

lejlighed til at ræsonnere på de matematiske modeller, der fremkommer, når data indlæses og sammenlignes.

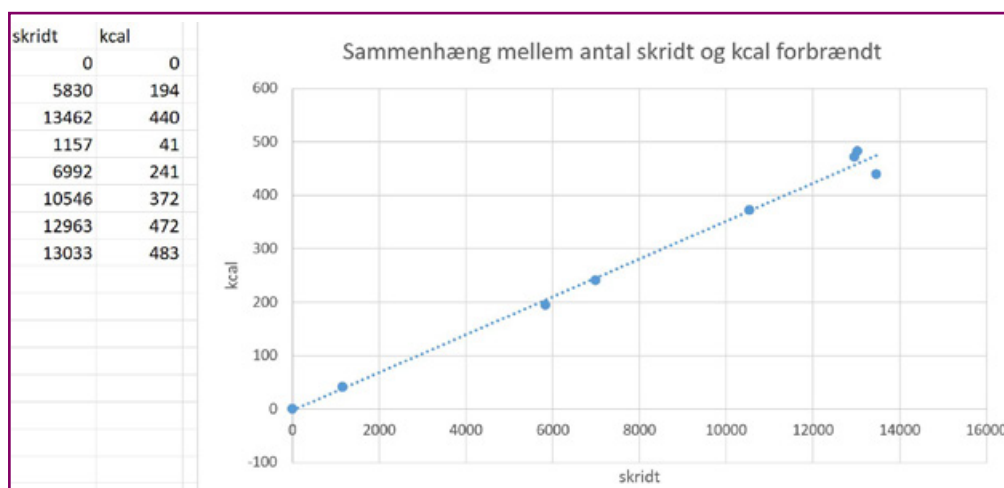
Brug af digitale værktøjer

Det er oplagt at anvende et it-værktøj til at fremstille modeller af elevernes opsamlede data og Anne-Mettes data, så eleverne kan danne sig et overblik.

Yderligere materiale

Hvis der er ønske om at udvide forløbet om dette tema, kan følgende link anbefales:

http://dkmat.dk/wp-content/uploads/2013/02/sund_matematik_fdb.pdf



Tidligere havde man ikke adgang til skridttællere i samme grad som nu, så der var behov for andre modeller, hvis man skulle regne på energibehov. Her er et eksempel:

Harris-Benedict Equations (calories/day)

Mænd:

$$(66,5 + 13,8 \cdot vægt) + (5,0 \cdot højde) - (6,8 \cdot alder)$$

Kvinder:

$$(665,1 - 9,6 \cdot vægt) + (1,8 \cdot højde) - (4,7 \cdot alder)$$

Vægt i kilogram, højde i centimeter, alder i år

<http://www.vacumed.com/293.html>

Verdens største primtal og andre store tal

Temaets matematikfaglige indhold er beregninger og omregninger i metersystemet og beregninger med tid. Det sker med udgangspunkt i verdens største primtal på mange millioner cifre.

Primtal¹ er ikke bare fascinerende i sig selv, fordi de udgør en ganske særlig gruppe af tal, men de er også en nødvendighed i den teknologiske verden, vi befinder os i. De anvendes nemlig til kryptering, der bliver anvendt til sikker online informationsoverførsel, fx af kreditkortnumre. Primtallene er tillige alle de naturlige tals multiplikative byggesten.

Den græske matematiker Euklid beviste, at der findes uendeligt mange primtal. Verden over arbejder computere konstant på at finde det næste største primtal.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Lad eleverne gå på nettet for at finde noget om primtal. Her vil de kunne finde ud af, hvor stort det sidst fundne største primtal er, ligesom der findes lister med tusindevis af primtal startende med 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...

I 1791 var Frankrig var det første land til at anvende en meter² som en standardiseret enhed for afstand. I dag defineres en meter som den afstand, lys bevæger sig i et lufttomt rum i løbet af $1/299\,792\,458$ sekund.

Skemaet på siden viser sammenhænge mellem de forskellige enheder, men det er vigtigt at arbejde på en relationel forståelse ved at arbejde konkret med enhederne. Det kan der arbejdes konkret på ved at skrive cifre og måle afstande og tid. Det kan ikke bare foregå med papir og blyant eller på computer, men også i større målestok med fx kridt uden for i skolegården. I det praktiske arbejde kan eleverne få lov at opleve, at ikke alle cifre fylder lige meget eller tager lige lang tid at skrive, så her skal både ræsonneres og modelleres. I arbejdet med tid arbejdes i andre talsystemer end titalssystemet, og der skal foretages andre typer af beregninger i forhold til arbejdet med omregninger med afstande.

Elevernes undersøgende arbejde

Det er i orden at antage, at der er lige mange af hvert

af de 10 cifre i det store tal med de mange cifre. Forskellen på antallet af dem kan alligevel først aflæses på 2. decimal i procentfordelingen.

Opgave 1

Beate har skrevet det rigtige udtryk, som udregnet vil give en længde lidt over 244 km for de ca. 23 mio. cifre, der er lidt over 1 cm brede i gennemsnit.

Opgave 2

Skal de 23 249 425 cifre række jorden rund ved ækvator skal hvert ciffer være 1,72 m bredt.

$$\frac{40000000}{23249425} \approx 1,7205$$

Opgave 3

Den tid, det tager at skrive en række cifre, er afhængig af mange faktorer, fx størrelse, skriveredskab og underlag. Det er jo ikke muligt at skrive hele tallet, så der skal arbejdes med hypoteser, ræsonneres og beregnes for at finde frem til et resultat, der så er helt afhængig af de præmisser, undersøgelsen indeholdt.

Fælles opsamling

Resultatet af elevernes arbejde er jo forskellige afhængig af de præmisser, der har været grundlag for løsningerne undervejs. Det kan derfor være af stor værdi, at de forskellige resultater formidles - det kan være enten som plancher, på en platform eller som en film, der samtidig beskriver arbejdsprocessen.

Brug af digitale værktøjer

Et CAS-værktøj er en uvurderlig hjælp til både at udføre og fastholde de omfattende beregninger. Der findes mange digitale muligheder til præsentation af problemstillingerne, fx PowerPoint, Prezi eller iMovie for film. I nogle CAS-værktøjer er indbygget et præsentationsprogram, der kan bruges til deling af resultaterne.

1) <https://da.wikipedia.org/wiki/Primtal>

2) <https://da.wikipedia.org/wiki/Meter>

Matematiske udfordringer

En matematisk udfordring er i dette opslag et matematisk problem sat ind i en kontekst. Problemløsningsprocessen er beskrevet på side 13 under opslaget "Væddemålet".

Udfordringerne i dette opslag kan gribes an på mange måder, men målet er, at eleverne både bruger analoge strategier og et CAS-værktøj til deres undersøgelser.

Introduktion og iscenesættelse af elevernes arbejde

Indled med en klassesamtale om teksten over billedet fra slikbutikken. Det kan evt. suppleres med et billede, hvor man viser 4 punge med navn på. Nogle elever kender ikke begrebet parvis, så en begrebsafklaring er tilrådelig.

Lad i første omgang eleverne arbejde sammen i mindre grupper med at løse problemet uden at bruge CAS. Når nogle af grupperne bliver færdige, kan de udfordres med et spørgsmål som: Hvordan kan I være sikre på, at I har fundet alle løsninger? Der er i øvrigt to løsninger på problemet.

På et tidspunkt tager man drøftelsen af spørgsmålene nederst på side 34. I den forbindelse bør eleverne bruge et CAS-værktøj til at gennemføre den samme undersøgelse. Eksemplet med TI-Nspire kan overføres direkte til andre CAS-værktøjer. Udfordringen kan også løses ved at opstille et ligningssystem, men det er ikke intentionen at bruge CAS på den måde.

Elevernes undersøgende arbejde

I undersøgelsen af problemet i **opgave 1** kan nogle have glæde af at bruge mere visuelle repræsentationer. Det kan fx være en tegning, der repræsenterer begge indkøb.

En mulig forklaring kan fx være, at to franskbrød må koste 144 kr. - 108 kr. = 36 kr.

Ved at bruge CAS kan arbejdet med at gætte og regne efter lettes, fordi CAS-værktøjet klarer beregningen.



Foto: Colourbox

$$\text{franskbrød} = 12 \quad \text{Definer}$$

$$\text{rugbrød} = 15 \quad \text{Definer}$$

Uge 1

$$4 \cdot \text{franskbrød} + 3 \cdot \text{rugbrød} = 93 \quad \text{Beregn}$$

Uge 2

$$2 \cdot \text{franskbrød} + 3 \cdot \text{rugbrød} = 69 \quad \text{Beregn}$$

Undersøgelsen i **opgave 2** er speciel ved, at det ikke er muligt at finde en løsning, hvor man bruger præcis 1000 kr. Så her er udfordringen at finde en løsning, hvor man kommer så tæt på 1000 kr. som muligt. Det kræver en systematisk undersøgelse, hvor CAS klarer de mange beregninger.



Foto: Bjørn Rasmussen

Der er i alt 107 forskellige løsninger til **opgave 3**. Her vil det være en god ide, hvis klassen i fællesskab prøver at finde så mange løsninger som muligt.

Fælles opsamling

I den fælles opsamling deler eleverne deres forskellige strategier med hinanden. Desuden er det en vigtig pointe at få fremhævet den undersøgende brug af CAS.

Brug af digitale værktøjer

CAS bruges her som et værktøj, der støtter den del af undersøgelsen, hvor man gætter og prøver efter. Denne video¹ viser, hvordan et CAS-værktøj kan bruges ved undersøgelsen af denne type udfordringer.

1) https://youtu.be/mbtVPn-8k_l

Matematik med it

Lærervejledning 1

Forfattere

Niels Jacob Hansen

Mikael Skånstrøm

Kirsten Søs Spahn

Redaktion

Jørgen Uhl Pedersen

Grafisk tilrettelæggelse

Bjørn Rasmussen · www.brgrafik.dk

Original CAS-grafik til temaerne

Forfatterne

Jørgen Uhl Pedersen

Tryk

Holm Print Management

Versionering til e-bog

Bjørn Rasmussen

ISBN: 978-87-93526-44-0

Copyright

Forlaget Matematik og forfatterne 2018

Forlaget Matematik

Nordby

8305 Samsø

mat.forlag@dkmat.dk

Tlf.: 8659 6022

www.dkmat.dk

Projektet *Matematik med it* støttes af

A. P. Møller og Hustru Chastine McKinney Møllers Fond til almene Formaal

Texas Instruments

Wolfram Research

Gladsaxe Kommune

Foto forside

Peter Lewicki, Unsplash (biograf)

Victor Larracuente, Unsplash (kanin)

Colourbox (ishockey)

Bjørn Rasmussen (mønter)